page 400 1/2 -1992.
I. N. A Option agro - Option bio.

MATHÉMATIQUES
(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

DEUXIEME COMPOSITION
Durée : 3 heures

PARTIE I

On considère la matrice: $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A.

1.1.- Montrer que A n'est pas inversible. Déterminer une base du noyau de f.

- Déterminer une base de l'image de f.

1.2. Calculer A^2, A^3 et en déduire pour tout entier $n>0$, la matrice A^n.

PARTIE II

On appelle p et q deux réels vérifiant $0<p<1$ et $0<q<1$. On considère un feu bicolore fonctionnant aléatoirement suivant les règles suivantes:

à chaque instant n, n entier naturel non nul, le feu rouge passe au vert avec la probabilité p et le feu vert passe au rouge avec la probabilité q. On note r_n la probabilité pour que le feu soit rouge à l'instant n, v_n la probabilité pour que le feu soit vert à l'instant n. On suppose donnés r_0 et v_0 vérifiant $r_0 + v_0 = 1$.

2.1. Montrer que les deux suites (r_n) et (v_n) vérifient une relation de récurrence de la forme $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée de dimension 2 dont on déterminera les coefficients en fonction de p et q.

2.2. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.1 Déterminer deux matrices B et C telles que $B + C = I$ et $B + (1 - p - q)C = A$.

22.2 Calculer B^2, C^2, BC et CB.

22.3 En déduire, pour tout entier $n>0$, une expression de A^n comme combinaison linéaire de B et C.

22.4 Expliciter r_n et v_n en fonction de n, p, q, r_0 et v_0. En déduire que les suites (r_n) et (v_n) sont convergentes et donner leurs limites respectives.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

On appelle p un réel vérifiant $0<p<1$. Une aiguille se déplace dans un cadran circulaire de telle sorte que son extrémité puisse indiquer l'un des quatre points cardinaux E, N, O, S distants les uns des autres d'un quart de cercle et rangés dans cet ordre, en suivant le sens trigonométrique. A chaque instant n, n entier naturel, l'extrémité de l'aiguille peut décrire négativement un quart de cercle avec la probabilité p, positivement un quart de cercle avec la probabilité $1 - p$.

On note respectivement E_n, N_n, O_n, S_n la probabilité pour qu'à l'instant n l'aiguille soit en E, N, O, S. On suppose données E_0, N_0, O_0, S_0 telles que $E_0 + N_0 + O_0 + S_0 = 1$.

3.1. Montrer que les suites (E_n), (N_n), (O_n), (S_n) vérifient la relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ N_{n+1} \\ O_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ N_n \\ O_n \\ S_n \end{pmatrix}.$$

On appelle désormais A la matrice carrée d'ordre 4 ainsi définie.

3.2. On suppose $p = \frac{1}{2}$. En utilisant la partie I, expliciter selon la parité de n, les probabilités E_n, N_n, O_n, S_n en fonction de E_0, N_0, O_0, S_0 et n.

On suppose jusqu'à la fin du problème $p \neq \frac{1}{2}$.

3.3. Calculer A^2.

3.4. On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer A'^2.
- Déterminer deux matrices B et C telles que $B + C = I$ et $B - C = A'$.
- Calculer B^2, C^2, BC et CB.
- Exprimer la matrice A^2 comme combinaison linéaire de B et C. En déduire, pour tout entier $n>0$, une expression de A^{2n} comme combinaison linéaire de B et C.

3.5.- Expliciter E_{2n}, N_{2n}, O_{2n}, S_{2n} en fonction de E_0, N_0, O_0, S_0, n et p. Montrer que les suites (E_{2n}), (N_{2n}), (O_{2n}), (S_{2n}) sont convergentes et donner leurs limites respectives.

- En déduire que les suites (E_{2n+1}), (N_{2n+1}), (O_{2n+1}), (S_{2n+1}) sont convergentes et donner leurs limites respectives.

- Les suites (E_n), (N_n), (O_n), (S_n) sont-elles convergentes?